L'USO DELLE TECNOLOGIE NELLA COSTRUZIONE DEL SIGNIFICATO IN MATEMATICA. ANALISI DI ALCUNE ATTIVITÀ DIDATTICHE.

Domingo Paola
Liceo scientifico "Issel" di Finale Ligure
G.R.E.M.G. Dipartimento di matematica Università di Genova
e-mail: paola.domingo@mail.sirio.it

Sommario*. In questo articolo vengono presentati due esempi di utilizzazione di strumenti come mediatori nel processo di acquisizione di conoscenza in matematica: il primo riguarda specificamente la scuola di base; il secondo la scuola secondaria. Entrambi possono essere pensati come parte di attività didattiche, svolte nel lungo periodo, tese ad avviare gli studenti al pensiero teorico e, in particolare, all'attività dimostrativa. Tali esempi mi consentono di affrontare e discutere uno dei punti che, a mio avviso, caratterizzano più profondamente e più compiutamente le indicazioni curricolari per la scuola di base suggerite dalla commissione ministeriale che si occupa della riforma dei cicli: la necessità, soprattutto in matematica, di una didattica lunga, volta alla costruzione di significato degli oggetti matematici e il rifiuto culturale, strategico, necessario delle sirene della didattica breve.*

La necessità di una didattica *lunga*, tesa alla costruzione di significato

Inizialmente, quando mi fu chiesto di avviare una riflessione sul tema precisato nel titolo di questo articolo, avevo pensato a un'introduzione di carattere teorico, piuttosto dettagliata, anche se non esaustiva sulla problematica del significato in matematica. Mi sembrava opportuno inquadrare teoricamente gli esempi che avrei presentato, per fornire chiavi di lettura esplicite delle mie proposte. Oggi penso che quell'impostazione non sia più opportuna, perché c'è la riforma dei cicli che procede, ma che suscita molte perplessità e, purtroppo, poche speranze e ancor meno entusiasmi tra gli insegnanti. Vorrei allora utilizzare l'occasione che mi offre il tema che mi è stato proposto per aprire un confronto che, anche se confinato nell'intervallo di tempo delle conferenze Mathesis, e nei limiti di spazio degli atti di tali conferenze, spero possa essere aperto e sereno e, soprattutto, possa contribuire ad avviare una riflessione più pacata e meditata sui limiti e sulle potenzialità di questa riforma.

Ho parlato dell'occasione che mi offre questo tema, perché penso che le indicazioni fornite dalla commissione dell'UMI e, nella sostanza, recepite nella premessa e nella sezione conclusiva delle indicazioni per la costruzione dei curricoli, vadano proprio nella direzione della necessità di una maggiore attenzione alla costruzione del significato in matematica, attraverso la mediazione di strumenti e tecnologie, più o meno sofisticate, più o meno moderne.

A questo scopo cito il seguente passo, tratto dalla sezione "Finalità delle discipline" presente nel documento inviato dal Ministro al Consiglio Nazionale della Pubblica Istruzione per il parere:
" Grande importanza come mediatori nei processi di acquisizione di conoscenza e nel supporto alla comprensione del nesso tra idee matematiche e cultura assumono gli strumenti, dai più semplici, come i materiali manipolabili, ai più complessi quali, tipicamente, il computer o le calcolatrici numeriche e simboliche.
È comunque essenziale nel processo di insegnamento-apprendimento di questa disciplina collegare strettamente esperienze di vita e riflessione su di esse con un progressivo processo di astrazione tipico delle procedure matematiche. Calibrando adeguatamente i ritmi dell'azione di insegnamento alle reali esigenze degli studenti, in una didattica che, per la matematica, deve essere lunga e di graduale assimilazione, l'insegnante, avvalendosi di contesto e strumenti opportuni, utilizzerà problemi e situazioni al fine di mobilitare le risorse intellettuali degli studenti per contribuire alla loro formazione generale.
In tutte le attività sarà essenziale la mediazione del linguaggio naturale, sia parlato sia scritto: l'esperienza e la verbalizzazione col linguaggio naturale dovranno precedere la formalizzazione e la riflessione sui sistemi di notazione simbolica propri della matematica. Per esempio prima di imparare a formalizzare una strategia risolutiva per mezzo dei segni dell'aritmetica i bambini dovranno esplorare e operare in campi di esperienza in cui attuare attività di quantificazione utilizzando strumenti e sistemi di rappresentazione che sono caratteristici del campo stesso (il calendario lineare per il tempo; monete per risolvere problemi di compravendita di beni….). Analogamente per le conoscenze legate allo spazio e alle figure sarà essenziale l'esplorazione dinamica in contesti vari.
L'acquisizione del linguaggio rigoroso della matematica deve essere quindi un obiettivo da raggiungere nel lungo periodo e una conquista cui gli allievi giungono, col supporto dell'insegnante, a partire dalle loro concrete produzioni verbali, quasi sempre imprecise ma ricche di significato per l'allievo: queste vanno messe a confronto e opportunamente discusse nella classe per giungere così a riconoscere, nell'uso di simboli e scritture formali, forme sintetiche di espressione del linguaggio naturale, con il loro alfabeto, regole di costruzione di scritture corrette e sintassi".
Nel documento ministeriale appare chiaro ed esplicito il seguente messaggio: la didattica (soprattutto) della matematica deve essere *lunga*, ossia deve tenere conto della necessità di tempi (e ambienti) di apprendimento che consentano la costruzione di significati degli oggetti di studio da parte degli studenti. Le attività didattiche devono essere accuratamente progettate dagli insegnanti che, a partire da campi di esperienza ricchi di significato per gli studenti e dai sensi personali eventualmente attribuiti dagli studenti agli oggetti di studio, devono portare gradualmente gli studenti stessi ad appropriarsi dei significati istituzionali. Questo percorso di graduale e faticosa appropriazione può essere aiutato dall'uso di strumenti adeguati.
Cerco di precisare con un esempio che cosa intendo quando dico che è necessario attivare strategie didattiche e costruire ambienti di apprendimento che consentano agli studenti di costruirsi significati degli oggetti matematici coerenti con i significati istituzionali.

L'esempio riguarda un'esperienza, effettuata con bambini di otto anni, che non avevano mai fatto uso del compasso in classe (Chassapis, 1999): l'obiettivo delle attività era quello di condurre i bambini a costruirsi il significato di circonferenza come insieme di punti equidistanti dal centro.
Inizialmente ai bambini è stato chiesto di disegnare circonferenze a mano, utilizzando come unici strumenti la carta e la matita. Il fatto che i bambini abbiano reagito con delusione ai loro prodotti ha suggerito che essi possedessero un concetto spontaneo di circonferenza, utilizzato per valutare i disegni da loro realizzati e giudicati *non sufficientemente rotondi, non lisci, che girano in modo non regolare…*
In seguito ai bambini sono stati dati oggetti circolari e mascherine con forme circolari: mediante l'uso di questi nuovi strumenti, i bambini sono riusciti a realizzare disegni considerati soddisfacenti. Questi strumenti non hanno consentito, però di far evolvere i sensi personali degli studenti sull'oggetto circonferenza verso il significato istituzionale che l'insegnante ha individuato come obiettivo dell'attività. I bambini hanno giustificato la loro soddisfazione con frasi del tipo: *ora il cerchio lo avevo già e così ho potuto tracciarlo seguendo il suo bordo*, oppure *è sufficientemente rotondo, gira bene*. In altri termini, i nuovi strumenti messi a disposizione dei bambini hanno consentito disegni più soddisfacenti, ma non hanno contribuito ad accrescere le competenze linguistiche, fino a raggiungere la capacità di comprendere la definizione di circonferenza che l'insegnante ha individuato come obiettivo dell'attività didattica.
Il passaggio all'uso del compasso è stato invece risolutivo: non solo il compasso induce un concetto dinamico di circonferenza, in quanto lo studente che lo utilizza vede generarsi una traccia che ha in mente, ma che non è ancora fisicamente presente, come lo è nel caso degli oggetti e delle mascherine con forme circolari. Soprattutto, il bambino che usa il compasso, se guidato dall'adulto, riesce a comprendere il ruolo strategico del centro e del raggio per definire una circonferenza. In un certo senso è proprio il compasso che consente di mettere in evidenza questo ruolo.
Provo a riassumere le principali caratteristiche dell'ambiente di apprendimento ora descritto: gli strumenti sono sia strumenti tecnici e oggetti quotidiani, quali matite, oggetti circolari, mascherine con all'interno forme circolari, compasso, sia strumenti simbolici come il linguaggio naturale e i disegni. Il *senso* personale attribuito dai bambini all'oggetto circonferenza è quello di "un tondo liscio, che curva bene". Il significato istituzionale dell'oggetto circonferenza, significato che l'insegnante ha assunto come riferimento, come punto di arrivo dell'attività didattica, è quello di circonferenza come luogo dei punti equidistanti dal centro. In questo ambiente di apprendimento lo strumento compasso diventa il mediatore principe fra i sensi personali e il significato istituzionale; l'azione dell'insegnante è quella di rendere possibile e di accelerare l'azione mediatrice dello strumento compasso attraverso il suggerimento di attività e di riflessione sulle attività svolte. Infine, l'azione dell'insegnante è quella di prestare al bambino, ma solo al momento opportuno, la voce del sapere matematico: quando l'azione del compasso nell'evidenziare il ruolo strategico di centro e raggio nella definizione della circonferenza sarà compiuta, il maestro presterà al bambino le parole dei matematici e dirà loro che i matematici dicono che la circonferenza è il luogo dei punti equidistanti dal centro.

Passo ora a descrivere le due esperienze, una relativa alla scuola di base e l'altra relativa alla scuola secondaria. La scelta di presentare queste due esperienze è motivata da varie considerazioni, fra le quali vorrei ricordare le due seguenti:

- nonostante siano state pensate e attuate in contesti diversi (una a Modena nel nucleo di ricerca didattica coordinato da Mariolina Bartolini Bussi, l'altra a Torino, coordinata da Ferdinando Arzarello), le due esperienze possono essere considerate anche come parte di un percorso unitario. Tale percorso può essere pensato come volto a favorire l'evoluzione degli studenti dalle argomentazioni alle dimostrazioni e a precisare le nozioni di teoria e, in particolare, dimostrazione;
- le due esperienze suggeriscono che molte delle difficoltà di apprendimento legate al concetto di dimostrazione sono spesso dovute a inopportunità didattiche e possono essere, pertanto, se non eliminate, almeno rese gestibili dallo studente con opportuni accorgimenti didattici, che consistono nel costruire adeguati ambienti di apprendimento.

Ingranaggi piani e avvio alla dimostrazione nella scuola di base

L'esperienza che ora cercherò di descrivere sommariamente si inquadra, dal punto di vista teorico, in una prospettiva vigotskiana, per l'enfasi data sia alla dimensione sociale del processo di costruzione della conoscenza, sia alla mediazione semiotica esercitata dall'uso degli strumenti.

La finalità dichiarata dell'esperienza era quella di avviare i bambini al pensiero teorico, in particolare ai teoremi matematici. I campi di esperienza utilizzati hanno interessato sia la pratica (i meccanismi e gli ingranaggi che possono essere considerati, in prima approssimazione, piani e che fanno parte della vita quotidiana extrascolastica degli studenti, come gli apriscatole, il cambio di una bicicletta, gli orologi meccanici, il cavatappi a doppia leva …), sia la teoria (la geometria studiata a scuola e, in particolare, i cerchi, le rette, i piani, le rotazioni…)

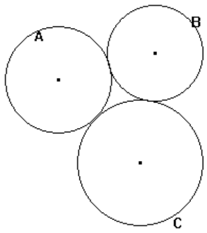
Una delle tesi fondamentali di questo lavoro è stata così riassunta (Bartolini Bussi, Bergamini & al., 1997): "gli ingranaggi concreti devono essere trasformati in strumenti di mediazione semiotica dialogici, cioè con almeno due voci in dialogo tra loro: la voce della pratica (nella quale problemi particolari vengono risolti con metodi ad hoc e si realizza la validazione attraverso l'esperimento) e la voce della teoria, nella quale problemi generali vengono risolti con metodi generali e la validazione si realizza con il ragionamento dimostrativo".

Per quel che riguarda la voce della teoria, il riferimento è in effetti duplice: da una parte la voce di Erone, per spiegare il funzionamento dell'ingranaggio, dall'altra quella di Euclide, per risolvere problemi di costruzione e di modellizzazione delle ruote dentate con circonferenze.

Il postulato che è stato assunto (come generalizzazione di osservazioni sperimentali) è il seguente:

due ruote, montate su due assi e ingranate tra loro per mezzo di denti, si muovono in versi contrari

Come conseguenza di questo postulato vengono enunciati e dimostrati vari teoremi. Per esempio, di fronte al problema di spiegare se e come funziona un ingranaggio formato da tre ruote dentate, i bambini prendono in considerazione sia configurazioni a "fila", con le tre ruote aventi i centri su una linea aperta, sia configurazioni a "collana", con le ruote aventi i centri su una linea chiusa (ciascuna ruota ingrana con le altre due). Alcuni bambini riescono a spiegare *perché una collana di tre ruote dentate non funziona.* La dimostrazione viene condotta per assurdo: i bambini immaginano che la ruota A giri in senso orario. Allora B deve girare in senso antiorario; ma, sempre per il postulato, C, che ingrana sia con A che con B, dovrebbe girare sia in senso antiorario che orario, il che è assurdo. E a un assurdo si arriva anche supponendo che A ruoti in senso antiorario. Quindi l'ingranaggio non può funzionare.



Alla fine dell'anno le maestre si occupano di costruire una sintesi della attività svolte. La sintesi ha lo scopo di esibire agli studenti la teoria cinematica di Erone: si tratta della voce che veicola il sapere matematico e che dà ai bambini quelle parole, quei termini, di cui hanno bisogno per esprimere pensieri e idee che ormai si sono costruiti, attraverso le attività svolte nel campo di esperienza degli ingranaggi e della geometria euclidea. Vengono così introdotte le definizioni di *fila di ruote dentate* e di *collana di ruote dentate*, dicendo che le definizioni servono per mettersi d'accordo sui termini da utilizzare e sul loro significato (ma si tratta, si badi bene, di un punto di arrivo e non di partenza dell'attività didattica); viene introdotto il postulato che due ruote, se ingranano, girano in versi opporti (le maestre precisano che i postulati sono proposizioni scelte come fondamento della teoria, per il livello di fiducia che si ha in esse). Vengono precisati i testi dei problemi ed enunciati e dimostrati teoremi facendosi prestare le parole opportune da Erone e da Euclide. I bambini accettano e comprendono la costruzione di questa teoria, perché essa consente di precisare e chiarire osservazioni e fatti già visti e idee che i bambini stessi hanno avuto: non si tratta di conoscenze calate dall'esterno, ma di precisazioni, con un linguaggio adeguato, di fatti e osservazioni che i bambini hanno già direttamente sperimentato ed effettuato. L'insegnante si limita a prestare ai bambini le parole dei matematici per organizzare esperienze e conoscenze già effettuate e costruite, anche se, magari, non ancora consolidate.

Avvio alla dimostrazione con un software di geometria dinamica nella scuola secondaria

L'attività che ora descrivo vuole essere un esempio, paradigmatico, delle attività di avvio alla dimostrazione che sono state progettate e realizzate al nucleo di ricerca didattica di Torino coordinato da Ferdinando Arzarello.

In particolare, il problema che viene qui presentato e discusso, è stato proposto a studenti di una quarta liceo scientifico che erano stati abituati già nel precedente anno scolastico ad affrontare e risolvere, in piccoli gruppi, con l'aiuto del software di geometria dinamica Cabri gèomètre, problemi aperti[1]. Ritengo sia opportuno invitare a una riflessione sull'uso di Cabri e, più in generale, di un software di geometria dinamica come strumento utilizzato per avviare gli studenti all'attività dimostrativa. Spesso si sente dire che per motivare alla dimostrazione può essere utile evidenziarne gli aspetti legati alla funzione di convincere: c'è chi ha anche precisato, in modo molto suggestivo, che dimostrare voglia dire convincere prima se stessi, poi un amico e infine un nemico della validità di un enunciato. Personalmente ritengo che la funzione della dimostrazione non possa essere identificata con quella di convincere qualcuno della validità di un certo enunciato; ritengo che ciò valga per tutti, ma, a maggior ragione, per i principianti, e quindi per gli studenti che si avviano all'attività dimostrativa. Per convincere qualcuno non si dimostra: si producono argomentazioni convincenti che hanno come unico vincolo quello di essere pertinenti. Io preferisco pensare, con Polya, che la convinzione della validità di un enunciato è condizione necessaria per passare alla dimostrazione. In altri termini, prima ci si convince (in vari modi, con argomentazioni che devono essere pertinenti, appropriate all'interlocutore, e che non hanno altri vincoli all'infuori della pertinenza), poi si dimostra. Dimostrare non vuol quindi dire convincersi della validità di un enunciato, ma vuol dire spiegare *perché* questo enunciato vale all'interno di un sistema di conoscenze più o meno ben organizzato (idealmente all'interno di una teoria). Cabri ha un pregio rispetto ad altri strumenti più o meno tradizionali: Cabri rende inutile la funzione della dimostrazione come attività atta a convincere qualcuno della validità di un determinato enunciato. Con Cabri in genere ci si convince della validità di un certo enunciato con un livello di fiducia spesso molto maggiore e sicuramente più immediato di quello che può produrre una dimostrazione. Se la funzione di una dimostrazione fosse quella di convincere qualcuno, allora Cabri renderebbe inutile la dimostrazione; ma se la funzione della dimostrazione è, come io credo, quella di spiegare *perché* un certo enunciato è valido all'interno di un sistema di conoscenze più o meno ben organizzato, allora Cabri motiva fortemente alla dimostrazione rivelandosi un formidabile supporto per tale attività.

Agli studenti è stato presentato il seguente problema[2]:

Ariele ha trovato una mappa del tesoro che riporta le seguenti indicazioni:

vai sull'isola segnata sulla carta. Appena sceso sull'isola troverai un melo M un pino P e una quercia Q. Da M dirigiti in linea retta fino a giungere in P. Qui gira verso la tua destra di 90 gradi

---

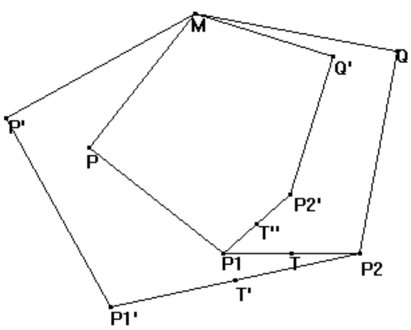
[1] per problema aperto, con Arsac (Arsac & al, 1988), intendo un problema che ha un enunciato abbastanza corto; non contiene in forma esplicita tutte le informazioni né tutte le ipotesi; non induce un metodo di soluzione; non contiene l'esplicitazione di tutte le richieste. Le domande poste sono del tipo: "Quali configurazioni assume ... Quali relazioni puoi trovare tra ..." e sono volte a favorire attività di esplorazione, osservazione e produzione di congetture.

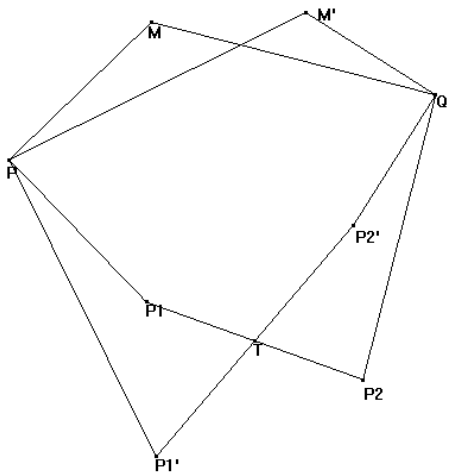
[2] Si tratta di una riformulazione di un problema presentato e risolto da George Gamow nel libro *Uno, due tre ... infinito*, pubblicato in Italia nel 1952 da Arnoldo Mondatori.

e percorri un segmento di lunghezza uguale a quella di MP. Pianta in questa posizione un paletto P1. Quindi ritorna in M e da qui dirigiti verso Q in linea retta. Giunto in Q gira a sinistra di 90 gradi e percorri un segmento di lunghezza uguale a quella di MQ. Pianta, in questa posizione un paletto P2. Il tesoro T si trova nel punto medio del segmento P1P2.

Ariele giunto sull'isola del tesoro ha la brutta sorpresa di non trovare più il melo M. Ci sono P e Q ma non c'è M. Potrà trovare ugualmente il tesoro?[3]

In genere gli studenti, dopo aver costruito in Cabri una figura che verifica le condizioni descritte nel testo del problema, iniziano a muovere i punti P,Q,M che possono essere trascinati. La prima osservazione è che movendo P e Q, anche T si muove, mentre se si muove M, allora T non si muove. La prima delle due figure riportate mostra l'effetto del movimento di P e Q su T (in particolare, movendo P e lasciando fissi Q e M, si ottiene il punto T'; movendo Q e lasciando fermi P e M si ottiene T"); la seconda figura mostra l'effetto del movimento di M: come si può vedere, in tal caso, si muovono P1 e P2, ma T rimane nella stessa posizione.





Cabri consente, grazie alla funzione di trascinamento[4], di rendersi conto che *se* P e Q si muovono, *allora* T si muove, mentre *se* M si muove, T non si muove: si tratta di una considerazione effettuata a livello puramente percettivo, vedendo semplicemente che cosa accade sullo schermo in seguito al trascinamento, con il mouse, dei punti P,Q e M. Gli studenti riescono, in un tempo relativamente breve a passare a un secondo livello, che possiamo chiamare relazionale: poiché se si muovono P e Q, allora T si muove, mentre se si muove M, T non si muove, si può concludere che T dipende da P e da Q, ma è indipendente da M. Quindi il problema può essere risolto: Ariele può trovare il tesoro

[3] Ho precisato inizialmente che l'approdo sull'isola era unico e ben precisato; ciò consente di eliminare ambiguità nel riferimento alla "sinistra" e alla "destra" e di rendere unica la posizione del tesoro.

[4] Per qualche considerazione più dettagliata su questa funzione si rimanda all'articolo Arzarello F., Olivero F., Paola D. & Robutti O.: 1999, Dalle congetture alle dimostrazioni. Una possibile continuità cognitiva, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, v. 22B n. 3, 209 – 233.

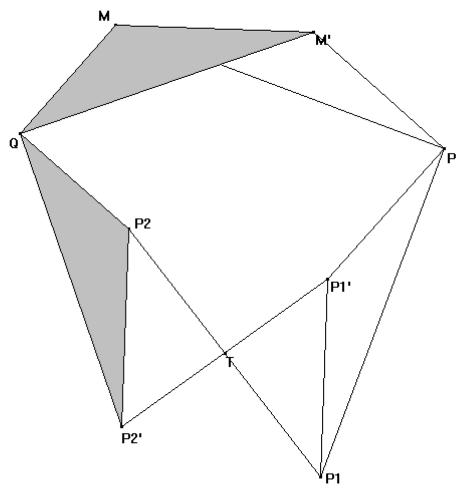
anche se non trova più il melo, in quanto T è indipendente da M. L'esplorazione successiva è stata assai ricca e diversificata, ed è stata condotta anche utilizzando gli strumenti "misura di un segmento" e "misura di un angolo" offerti da Cabri: tutti gli studenti si sono accorti che T appartiene all'asse del segmento PQ; qualcuno ha scoperto che T è il centro di uno dei due quadrati costruiti su PQ. Tutti i gruppi di studenti sono arrivati comunque a concludere che *qualunque sia* la posizione di M, T è determinato. Questa affermazione si situa a un livello diverso da quello che ho prima chiamato *relazionale* (T è indipendente da M); direi che si situa a livello *logico*: poiché T è indipendente da M, allora qualunque sia M, T può essere determinato. Ciò suggerisce che Ariele, giunto sull'isola possa scegliere un punto qualunque, chiamarlo M e seguire le indicazioni suggerite dalla mappa, arrivando a trovare il tesoro T.

In poco meno di un'ora di lezione tutti gli studenti sono riusciti a risolvere il problema e a convincersi, al di là di ogni ragionevole dubbio, che quella trovata e descritta era una efficace soluzione: erano quindi ormai motivati a dimostrare *perché* T è il centro di uno dei quadrati costruiti su PQ oppure *perché* per trovare T è sufficiente scegliere un qualunque punto M del piano. Tutti gli studenti hanno iniziato l'attività di ricerca e costruzione della dimostrazione nella successiva ora di lezione, ma nessun gruppo è riuscito a trovarla. I tentativi sono proseguiti a casa e in tre altre occasioni in classe (in una di esse i ragazzi hanno chiesto di poter utilizzare ancora Cabri, ma nelle altre due volte si è lavorato solo con carta e matita); è stato interessante osservare come i gruppi abbiano cercato di utilizzare, durante l'attività di ricerca e costruzione della dimostrazione, osservazioni effettuate durante la fase di esplorazione in Cabri. Ciò suggerisce che possa esistere una continuità cognitiva tra la fase di esplorazione e osservazione, che porta a formulare congetture e quella di costruzione di una dimostrazione delle congetture prodotte: questa continuità sembra essere piuttosto significativa, visto che a nessuno studente è venuto in mente di fissare un sistema di riferimento cartesiano e utilizzare la geometria analitica per dimostrare che la posizione di T non varia al variare di quella di M (eppure gli studenti avevano più volte utilizzato la geometria analitica come strumento di dimostrazione).

Dopo circa una decina di giorni un gruppo (Gabriele, Valentina e Vittorio) è riuscito a trovare una dimostrazione che riporto anche perché mi sembra particolarmente intelligente ed elegante.

L'idea della dimostrazione di Gabriele, Valentina e Vittorio viene così espressa dai tre ragazzi: "per dimostrare che, dovunque si trovi M, T rimane nella stessa posizione, è possibile prendere un punto M' a caso e dimostrare che il punto medio del segmento P1'P2' è lo stesso punto medio del segmento P1P2 ". In riferimento alla figura di seguito riportata, i ragazzi si propongono di dimostrare che i triangoli P2'P2T e P1'P1T sono congruenti. Sempre facendo riferimento alla figura propongo, con mie parole, la dimostrazione costruita dagli studenti:

Consideriamo i triangoli MM’Q e QP2P2’. Essi hanno: M’Q=QP2’ per ipotesi ; MQ=QP2 per ipotesi; inoltre gli angoli MQM’ e P2’QP2 sono congruenti perché complementari di uno stesso angolo. In base al primo criterio di congruenza dei triangoli, possiamo concludere che i due triangoli considerati sono congruenti. In particolare abbiamo che P2P2’ = MM’.
Con analoghe considerazioni è possibile dimostrare che i due triangoli MM'P e P1P1'P sono congruenti. In particolare abbiamo che MM’= P1P1’.
Per la proprietà transitiva della congruenza possiamo affermare che P2P2' = P1P1'. Inoltre gli angoli P2TP2’ e P1TP1’ sono congruenti perché opposti al vertice. Osserviamo ancora che P2 e P2’ sono i corrispondenti di M e M’ in una rotazione di 90°. Quindi P2P2’ è perpendicolare a MM’. Analogamente si può dimostrare che MM' è perpendicolare a P1P1’. Le rette su cui giacciono i segmenti P2P2’ e P1P1’ sono quindi parallele; ciò consente di affermare che gli angoli TP1'P1 e TP2'P2 sono congruenti, così come gli angoli TP2P2' e TP1P1'. Quindi, per il secondo criterio di congruenza i triangoli P2'P2T e P1'P1T sono congruenti. In particolare P2'T = P1'T e P2T=P1T; poiché ciò vale qualunque sia il punto M', possiamo concludere che la posizione di T è indipendente dalla scelta del punto M.



Conclusione
Ho parlato di ingranaggi e di Cabri, per fare due esempi di che cosa io intenda con didattica lunga, realizzata in ambienti di apprendimento adeguati alla costruzione di significato degli oggetti matematici, in cui l'azione degli strumenti sia quella di mediazione fra i sensi personali eventualmente attribuiti dagli studenti agli oggetti di studio e i significati istituzionali individuati dall'insegnante per quegli oggetti.
Avrei però potuto parlare di altri strumenti e di altri ambienti; per esempio dell'uso delle calcolatrici numeriche e grafiche nella scuola di base; delle calcolatrici grafiche e simboliche nella scuola

secondaria. Avrei potuto parlare dell'uso dei sensori, in particolare dei sensori di posizione, che consentono di trasferire dati a una calcolatrice grafica e di osservare su uno schermo la traccia della legge oraria dovuta a un corpo in movimento, in particolare al movimento dello stesso studente. Osservare gli effetti su un grafico del proprio movimento offre possibilità fino a poco tempo fa inimmaginabili nella didattica della matematica. Si tratta di potenzialità che vanno esplorate, che devono diventare oggetto di attenzione e di studio da parte di ricercatori e insegnanti e che sono rese possibili proprio grazie alle nuove tecnologie.

D'altra parte, se è bene ricordare che ogni strumento incorpora in sé sapere e cultura e come tale può e dovrebbe essere utilizzato per facilitare l'appropriazione di questo sapere e di questa cultura da parte degli studenti, è anche bene essere consapevoli che l'uso di una tecnologia, per quanto buona essa sia, non è di per sé sufficiente a portare innovazioni o miglioramenti nell'azione didattica: perché ciò avvenga è necessaria un'attività di progettazione didattica che deve essere condotta tenendo presenti, con pari attenzione e dignità sia il piano storico - epistemologico, sia quello pedagogico - cognitivo, sia quello più strettamente tecnico - teorico di una disciplina.

Bibliografia

Arsac, G., Germain, G. & Mante, M.: 1988, *Probleme ouvert et situation-probleme,* IREM, Academie de Lyon.

Bartolini Bussi, M., Bergamini, B., Betti,B., Ferri, F., Fortini, C., Monari, F., Mucci, A. & Garuti, R.: 1997, I campi di esperienza dei meccanismi e degli ingranaggi tra esperienza quotidiana, tecnologia e geometria, Modena.

Chassapis, D: 1999, The mediation of tools in the development of formal mathematical concepts: the compass and the circle as an example, *Educational Studies in Mathematics*, vol n. 3, 275-293.

Torino, 15 marzo 2001.